TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

**HOMEWORK #3**: ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÍ HIỆU TIỆM CẬN

**GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Hương**

***Người thực hiện: Nguyễn Đỗ Quang 20520720***

TP.HCM, ngày 19, tháng 10, năm 2022

**Bài tập 1:**

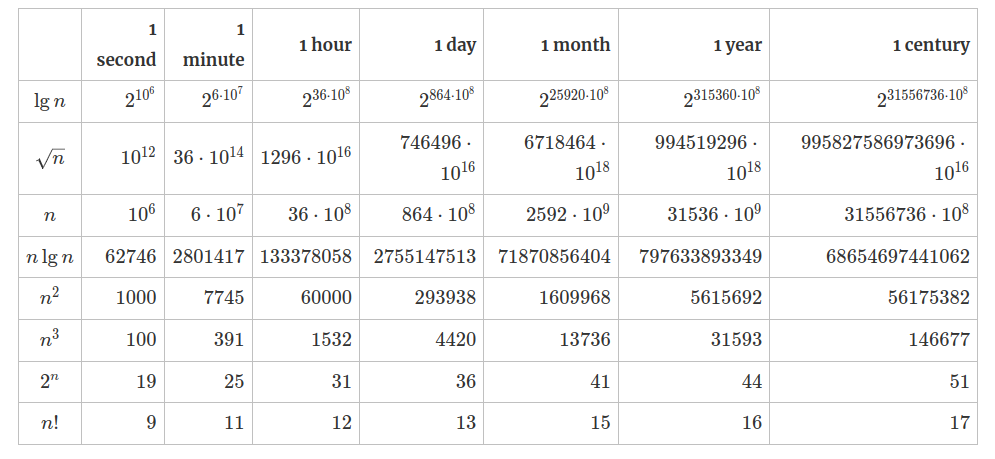
1. Ý nghĩa của độ phức tạp là: độ phức tạp là là một thuật ngữ được sử dụng để dễ dàng đánh giá mức độ hiệu quả của thuật toán (chủ yếu về mặt thời gian hay rõ ràng hơn là số phép toán cơ bản để thực hiện thuật toán)
2. Em đồng ý với ý kiến trên vì trong thực tế dữ liệu rất lớn, và vì thế người ta chỉ quan tâm tốc độ tăng của hàm số (hay bậc tăng trưởng (order of growth)) (VD: n,,,nlogn,....)
3. Có 3 kí hiệu tiệm cận chính:

+ O (tiệm cận trên hay upper bound ): là tập hợp các hàm chặn trên của hàm thời gian thực hiện thuật toán

+ Ω (tiệm cận dưới hay lower bound ): là tập hợp các hàm chặn dưới của hàm thời gian thực hiện thuật toán

+ : là tập hợp các hàm kẹp giữa hàm thời gian thực hiện thuật toán

**Bài tập 2:**



***Cách tính:***

Ta có mỗi f(n) sẽ thực hiện được tính đơn vị ms=>f(n) = t(ms)

1 second = 106 microseconds

Theo công thức ta có N chạy trong 1 giây:

+logn = 106 =>n=

+ = 106 =>n =

+n = 106 =>n =

+nlogn= 106 =>n = 62746

+ = 106 =>n =

+= 106 =>n =

+106 =>n = 6.log(10) = 19

+n!= 106 =>n = 9

**Bài tập 3:**

**a.** **Suy luận trên là sai**

Vì là hàm thuộc tập hợp các hàm có tiệm cận trên là O()

và là hàm thuộc tập hợp các hàm có tiệm cận trên là O()

nhưng không có nghĩa là hàm =

**b.** Xét f(n) =

g(n)=

h(n)=

**Chứng minh f(n) = O(g(n))**

**hay**

R+, n0 N

sao cho n≥n0

Giả sử chọn c=8

Ta có

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | 0 | 640 |
|  | + 0 - | 0 + |

Vậy chọn c=8, n0 = 640

=> n≥640

**=>**

**Chứng minh**

R+, n0 N

hay n≥n0

n≥1 ta có:

Vậy chọn c=1, n0=1

n≥1

***=>***

**Chứng minh**

R+, n0 N

hay n≥n0

n≥1 ta có:

Vậy chọn c=1, n0=1

n≥1

***=>***

**Chứng minh )**

Giả sử: )

R+, n0 N

Ta có: n≥n0

<=> n≥n0(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1

7c n0

TH2

n0 7c

=> Giả sử ban đầu sai

***=> )***

**c. Chứng minh )**

Giả sử )

R+, n0 N

Ta có: ) n≥n0

<=> ++c n≥n0(Mâu thuẫn vô lý)

Có trục số:

TH1

c n0

TH2

n0 c

***Vậy )***

**Chứng minh O())**

giả sử O())

Xét một hàm bất kì f(x) trong O() n≥n0

R+, n0 N

Ta có: f(n)c n≥n0

<=> f(n)cn.n n≥n0

vớiR+, n0 N thì cn luôn là một số phụ thuộc vào n

=> O()) (1)

giả sử O(n))

Xét một hàm bất kì g(x) trong O(n) n≥n0

R+, n0 N

Ta có: f(n)dn n≥n0

<=>f(n) n≥n0

vớiR+, n0 N thì luôn là một số phụ thuộc vào n

=> O(n)) (2)

***Từ (1) và (2) => O())***

**Chứng minh nO(**

Giả sử

R+, n0 ≥2 sao cho:

nc n≥n0

<=> c n≥2 (

(≥2)

Có trục số:

TH1

c n0=2

TH2

n0=2c

=> c n≥2 (Vô lý)

***Vậy nO(***

**Bài tập 4:** (có c là số rất nhỏ)

**Group 1:**

f1(n) = = = =

f2(n) = n100 =

f3(n) = 1/n = O)

f4(n)=101000n = 10000.O(n)

f5(n)=nlogn = n\* = O()

Vậy: f3(n)<f4(n)<f5(n)<f1(n)<f2(n)

**Group 2:**

f1(n) = = O(C) = O(1)

f2(n) = = O()

f3(n) = = = =O()

f4(n)= n = = O()

Vậy: f1(n)<f4(n)<f3(n)<f2(n)

**Group 3:**

f1(n) = = = =

f2(n) = 2n

f3(n) = ===

f4(n) = = + n = ===

Vậy: f4(n)<f1(n)<f3(n)<f2(n)

**Group 4:**

f1(n) = = =O()

f2(n) = = + =O()

f3(n) = = = O()

f4(n) = 4logn + loglogn = + log = 4+c =O()

f5(n) = = = O()

Vậy: f4(n)<f2(n)<f5(n)<f1(n)<f3(n)

**Group 5: (fix)**

f6(n) = = =

f7(n) = = =

f8(n) = =

f9(n) = = == =

f10(n) = ==

Vậy: f10(n)<f9(n)<f7(n)<f6(n)<f8(n)

(\*)

**Bài tập 5:**

**(Kêt luận chọn c, n)**

**O(c) = O(1) với C là hằng số**

+Chứng minh O(1) là tập con của O(c)

Xét một hàm bất kì f(n) O(1)

suy ra bR+, n0 N sao cho

f(n)b.1 n≥n0

<=> f(n).c

R+ n0 N sao cho

f(n)a.c n≥n0

Vậy f(n) O(c)

=> O(1) là tập con của O(c) (1)

+Chứng minh O(c) là tập con của O(1)

Xét một hàm bất kì g(n) O(c)

suy ra R+, n0 N sao cho

f(n)d.c.1 n≥n0

R+ n0 N sao cho

g(n)e.1 n≥n0

Vậy g(n) O(1) (1)

=> O(c) là tập con của O(1) (2)

***Vậy từ (1) và (2) => O(c) = O(1)***

**Chứng minh O(Cf(n)) = O(f(n)) với C là hằng số**

+Chứng minh O(cf(n)) là tập con của O(f(n))

Xét một hàm bất kì g(n) O(c(f(n)))

suy ra bR+, n0 N sao cho

g(n)b.c.f(n) n≥n0

R+ n0 N sao cho

g(n)d.f(n) n≥n0

=> O(cf(n)) là tập con của O(f(n)) (1)

+Chứng minh O(f(n)) là tập con của O(cf(n))

Xét một hàm bất kì k(n) O((f(n)))

suy ra R+, n0 N sao cho

k(n)e.f(n) n≥n0

<=>k(n).(cf(n)) n≥n0

R+ n0 N sao cho

g(n)m.(cf(n)) n≥n0

=> O(f(n)) là tập con của O(cf(n)) (2)

***Vậy từ (1) và (2) =>O(Cf(n)) = O(f(n))***

**Chứng minh nếu f(n)O(g(n)) và g(n) O(h(n)) thì f(n)O(h(n))**

nếu f(n)**O(g(n)) thì**

f(n)c1.g(n) n≥n1 (với c1 R+) (1)

nếu g(n) O(h(n)) thì

g(n)c2.h(n) n≥n2 (với c2 R+) (2)

từ (1) và (2)

=>f(n)c1.c2.h(n) n≥max(n1,n2 )

suy ra R+, (n0=max(n1,n2 )) N sao cho

=>f(n)a.h(n) n≥max(n1,n2 )

***Vậy f(n)O(g(n)) và g(n) O(h(n)) thì f(n)O(h(n))***

**Chứng minh nếu t1(n)O(f(n)) và t2(n)O(g(n)) thì t1(n)+t2(n)O(max{f(n),g(n)})**

nếu t1(n)O(f(n)) thì

t1(n)c1.f(n) n≥n1 (với c1 R+) (1)

nếu t1(n)O(g(n)) thì

t2(n)c2.g(n) n≥n2 (với c2R+) (2)

ta có: t1(n)+t2(n)c1.f(n)+c2.g(n)c1(max{f(n),g(n)})+c2(max{f(n),g(n)})(c1+c2)(max{f(n),g(n)})

n≥max(n1,n2 )

suy ra R+, (n0=max(n1,n2 )) N sao cho

t1(n)+t2(n)(max{f(n),g(n)})

***Vậy nếu t1(n)O(f(n)) và t2(n)O(g(n)) thì t1(n)+t2(n)O(max{f(n),g(n)})***

**Bài tập 6:**

**Nếu t(n) O(g(n)), thì g(n) Ω(t(n))**

R+ n0 N sao cho

Khi t(n) O(g(n)) => t(n) c.g(x) với n≥n0

nếu t(n)O(g(n)) thì

t(n)c.g(n) n≥n(với cR+)

=>t(n).g(n) n≥n

Luôn R+ n0 N sao cho

t(n).g(n) n≥n(với cR+)

***Vậy nếu t(n) O(g(n)), thì g(n) Ω(t(n))***

**Chứng minh (ag(n))=(g(n)), khi mà a>0**

Xét hàm f(n) bất kì thuộc g(n)

suy ra R+, n0 N

sao cho g(n)f(n)g(n) n≥n0

<=> (ag(n))f(n)(ag(n)) n≥n0

Vậy luôn (và ) để (ag(n))f(n)(ag(n)) n≥n0

(g(n)) là tập con của (ag(n)) (1)

Xét hàm f(n) bất kì thuộc g(n)

suy ra R+, n0 N

sao cho g(n)f(n)g(n) n≥n0

Vậy luôn ( và ) để g(n)f(n)g(n) n≥n0

(ag(n)) là tập con của (g(n)) (2)

***Từ (1) và (2) => (ag(n))=(g(n)), khi mà a>0***

**Chứng minh: (g(n)) = O(g(n)) Ω(g(n))**

Xét một hàm bất kì f(n) O(g(n))

suy ra bR+, n0 N sao cho

f(n)b.g(n) n≥n0 (1)

Xét một hàm bất kì f(n) Ω(g(n))

suy ra R+, n0 N sao cho

c.g(n)f(n) n≥n0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra

c.g(n)f(n)b.g(n) (với R+)

***Vậy (g(n)) = O(g(n)) Ω(g(n))***

**Chứng minh: max{f(n),g(n)} = (f(n)+g(n))**

Ta cần chứng minh a(f(n)+g(n))max{f(n),g(n)}b(f(n)+g(n)) (R+, n0 N)

Ta có max{f(n),g(n)}(f(n)+g(n)) n≥n0 (1)

Ta cũng có: f(n) +g(n) 2max{f(n),g(n)}

<=>(f(n) +g(n) max{f(n),g(n)} n≥n0 (2)

Từ (1) và (2): (f(n) +g(n) max{f(n),g(n)}(f(n)+g(n)) n≥n0

***Vậy max{f(n),g(n)} = (f(n)+g(n))***

**Chứng minh: f(n)+g(n) = (max{f(n),g(n)})**

Ta có max{f(n),g(n)} f(n) +g(n) max{f(n),g(n)} +max{f(n),g(n) n≥n0

<=> max{f(n),g(n)} f(n) +g(n) 2max{f(n),g(n)} n≥n0  (luôn đúng)

***Vậy f(n)+g(n) = (max{f(n),g(n)})***

**Bài tập 7:**

**Khẳng định Nếu f(n) = (g(n)) và g(n) = (h(n)), thì h(n) = (f(n))**

Nếu f(n) = (g(n)) ta có:

R+ n0 N sao cho

.g( f(n).g(n) n≥n1 (1)

Nếu g(n) = (h(n)) ta có:

R+ n0 N sao cho

.h( g(n).h(n) n≥n2 (2)

Từ (1) và (2) ta có:

..h( f(n)..h(n) n0=max{n1,n2}

***Vậy nếu f(n) = (g(n)) và g(n) = (h(n)), thì h(n) = (f(n))***

**Khẳng định Nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(h(n)), thì h(n) =** Ω**(f(n))**

**Khẳng định trên đúng vì:**

Nếu f(n) = O(g(n)) ta có:

R+ n1 N sao cho

f(n).g(n) n≥n1  (1)

Nếu g(n) = O(h(n)) ta có:

R+ n2 N sao cho

g(n).h(n) n≥n2 (2)

Từ (1) và (2) ta có:

f(n)..h(n) n≥n0(n0=max{n1,n2})

<=>f(n)h(n) n≥n0

***Vậy Nếu f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(h(n)), thì h(n) = Ω(f(n))***

**Khẳng định nếu** **f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì f(n)=g(n)**

**Khẳng định trên là sai vì:**

Nếu f(n) = O(g(n)) ta có:

R+ n1 N sao cho

f(n).g(n) n≥n1  (1)

Nếu g(n) = O(f(n)) ta có:

R+ n2 N sao cho

g(n).f(n) n≥n2 (2)

Có f(n).g(n)

<=>f(n)

Dấu “=” chỉ xảy ra khi a=b=1

nên khẳng định **f(n) = O(g(n)) và g(n) = O(f(n)), thì f(n)=g(n) không phải lúc nào cũng đúng**

**Khẳng định n/100 = Ω(n)**

cnn/100 với n≥1

chọn c=1/100 (R+)

Chọn n0=0

Ta có (1/100)nn/100 với n≥0

***=> Khẳng định trên đúng***

**Khẳng định f(n) + O(f(n)) = (f(n))**

**Khẳng định trên đúng vì:**

Giả xử f(n) + O(f(n)) = (f(n)) thì:

Xét một hàm bất kì g(n) O(f(n)) (1)

thì f(n) + g(n) = h(n) (với một số hàm h(n) O(f(n))) (2)

Từ (1) ta có R+ n1 N sao cho:

g(n) n≥n1

<=>f(n)+ g(n) n≥n1

<=>f(n)+ g(n) n≥n1 (3)

Từ (2) và (3) ta có:

h(n) n≥n1

Vậy R+ n1 N sao cho:

h(n) n≥n1

=> h(n) O(f(n))

***Vậy khẳng định trên đúng***

**Khẳng định** **210n = O(2n)**

**Khẳng định trên là sai vì:**

**Cách 1:**

Giả sử 210n = O(2n)

R+

Ta có: với n≥n0

<=> với n≥n0 (vô lý)

Có trục số:

TH1

c n0

TH2

n0 c

***=> Khẳng định trên là sai***

**Cách 2:**

Khẳng định trên là **sai** vì:

Giả sử 210n  Ω(2n)

thì với n≥n0

c

<=> 9n

<=> n ≥

chọn n0 = ta có

Bất đẳng thức:

với n≥ luôn đúng

=> 210n  Ω(2n)

***Vậy rõ ràng 210n  O(2n)***

**Khẳng định**  **=**

**Khẳng định trên là đúng vì:**

Giả sử nếu =

R+ ,n0 N sao cho

n≥n0

Xét n≥n0

Ta có n≥n0 ≥2

n≥n0 thì 1 (Do n)

*vậy =1 thì n≥n0 ≥2 (1)*

Xét n≥n0≥2

Ta có n≥n0 ≥2

Ta lại có n≥2

Vậy

<=>

*vậy = thì n≥n0 ≥2 (2)*

***Từ (1) và (2) => =***

**Bài tập 8:**

**Khẳng định f(n) O(n) =>**

Khi f(n) O(n)

ta có R+ ,n0 N sao cho

f(n)cn

<=>

R+ ,n0 N

Ta có:

Vậy

**Vậy f(n) O(n) =>**